数理解析研究所講究録
1144巻 2000年 47-58

On factorization theorem in analytic crossed products

鶴岡高専　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
新潟大学理学部　斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

1. Introduction

作用素環における分解性の研究は、様々なタイプがあり, 現在も多くの研究者によってなされている. その一つに positive operator の分解性の研究がある. 一般に, Hilbert space 上の positive な bounded operator は, $B(\mathcal{H})$ の元 A によって A^*A と分解できる. しかし $B(\mathcal{H})$ の部分環の元で同様に分解出来るかを考えると, その問題は複雑になり, $B(\mathcal{H})$ の元による分解とは異なる手法が必要になる. 例えば, Arveson は Hardy space における inner, outer function の拡張として, (order type $\mathbb{Z}$ の) nest 環 $\mathfrak{A}$ に inner, outer operator の概念を導入して, positive invertible な $B(\mathcal{H})$ の任意の元は $\mathfrak{A}$ の元 A により A^*A と分解できることを示した (cf. [1]). また, positive invertible な $n \times n$ matrix が positive diagonal を持つ upper triangular matrix A によって A^*A と unique に分解できることは Cholesky 分解として知られているが, Power は Hilbert space 上の positive operator に対して構成的な手法により Cholesky 分解を得て, $B(\mathcal{H})$ の positive な元が nest 環の元 A によって A^*A と分解できるための必要十分条件は, nest が well ordered であることをつきとめた (cf. [6]). 解析的接合積に対する分解性についても幾つかの研究がなされているが, それは positive invertible な元に対するものであり, invertible の条件を外した場合は, 今のところ調べられていないようである. そこで我々は次のような問題を考えた.

問題 接合積の positive な任意の元は, 解析的接合積の元によってどのような分解が可能か. もし一般に解析的接合積の元 A によって A^*A という分解が出来ない場合は, そのような分解が出来るための必要十分条件を求めよ.

ここでは, 接合積の positive な元に対する Cholesky 分解を考えることによりこの問題を考察し, それにより得られた幾つかの結果について報告する.

2. Preliminaries and definitions

M を von Neumann 環として α を M の $*$-automorphism とする. ここでは M は Haagerup の意味での非可換 L^2-space $L^2(M)$ に作用するものとする (cf. [3]). 任意の $x \in M$ に対して, $L^2(M)$ 上の operator l_x(resp. r_x) を $l_x y = xy$(resp. $r_x y = yx$), $y \in L^2(M)$ で定義すれば l(resp. r) は M の $L^2(M)$ 上への faithful normal representation (resp. anti-representation) であるので,

$$l(M) = \{l_x \mid x \in M\}, \qquad r(M) = \{r_x \mid x \in M\}$$

とおくと, $l(M)$, $r(M)$ は $L^2(M)$ 上の von Neumann 環になる. $L^2(M)$ 上の operator J を $Jy = y^*$, $y \in L^2(M)$ により定義すれば, J は $L^2(M)$ 上の conjugate linear isometric involution であり, $L^2(M)_+$ を $L^2(M)$ の positive part とすれば $\{l(M), L^2(M), J, L^2(M)_+\}$ は Haagerup[2] の意味での M の standard form なので von Neumann 環 $l(M)$ と $r(M)$ は互いの commutant である. 更に [2, Theorem 3.2] より $L^2(M)$ 上の unitary operator u で $l_{\alpha(x)} = ul_xu^*$, $r_{\alpha(x)} = ur_xu^*$, $(\forall x \in M)$ を満たすものが存在する. 次に, 接合積を定義するために, Hilbert space $\mathbb{L}^2$ を

$$\mathbb{L}^2 = \left\{ f : \mathbb{Z} \to L^2(M) \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f(n)\|_2^2 < \infty \right\}$$

で与えて, その subspace $\mathbb{H}^2$ を

$$\mathbb{H}^2 = \{f \in \mathbb{L}^2 \mid f(n) = 0,\ n < 0\}$$

とする. ここで $\|\cdot\|_2$ は $L^2(M)$ ノルムとする. Hilbert space $\mathbb{L}^2$ 上の operator L_x, R_x, L_δ, R_δ を次の式で定義する.

$$(L_xf)(n) = l_xf(n),\ (R_xf)(n) = r_{\alpha^n(x)}f(n)$$
$$(L_\delta f)(n) = uf(n-1),\ (R_\delta f)(n) = f(n-1) \quad (f \in \mathbb{L}^2,\ n \in \mathbb{Z}).$$

$L(M) = \{L_x \mid x \in M\}$, $R(M) = \{R_x \mid x \in M\}$ とおいたとき, 左側 (resp. 右側) 接合積を $\mathfrak{L} = \{L(M), L_\delta\}''$ (resp. $\mathfrak{R} = \{R(M), R_\delta\}''$) により定義して, 左側 (resp. 右側) 解析的接合積 $\mathfrak{L}_+$ (resp. $\mathfrak{R}_+$) を $L(M)$ (resp. $R(M)$) と L_δ (resp. R_δ) によって生成される $\mathfrak{L}$ (resp. $\mathfrak{R}$) の σ-weakly closed subalgebra とする.

3. Factorization

解析的接合積における分解性を考える前に, ここではその重要なアイデアである positive operator matrix の分解性を考察する. 次の Lemma は良く知らた結果であるが, その証明は後の議論に必要であるので, ここではその証明も付け加える.

Lemma 3.1. *Hilbert space* $\mathcal{H}$ *が* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ *と直和で与えられているとき,* $\mathcal{H}$ *上の positive operator* C *の* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ *に対する matrix form を*

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} c & b^* \\ b & a \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \scriptstyle\mathcal{H}_1 \\ \scriptstyle\oplus \\ \scriptstyle\mathcal{H}_2 \end{array}$$

で与える. このとき, 次の strong operator topology による 極限 $\lim_{n\to\infty} b^*(a + n^{-1}I_1)^{-1}b$ *が存在して, それを* c_1 *とすれば次の関係を満たす.*

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & b^* \\ b & a \end{pmatrix} \le C$$

特に, C_1 は条件 $C|_{\mathcal{H}_2} = D|_{\mathcal{H}_2}$ かつ $D \leq C$ を満たす *positive operator* の中で最小である.

Proof. 仮定より C は

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathcal{H}_2 \\ \oplus \\ \mathcal{H}_1 \end{array}$$

とかけているので, 仮に a が invertible であれば

$$A = \begin{pmatrix} I_1 & -a^{-1}b \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

もまた invertible であり次を次をみたす.

$$A^*CA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c - b^*a^{-1}b \end{pmatrix}$$

よって C が positive であることと, $c - b^*a^{-1}b \geq 0$ が成り立つことは同値である.

次に a が invertible を仮定しない場合, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次の positive operator

$$C + n^{-1}I = \begin{pmatrix} a + n^{-1}I_1 & b \\ b^* & c + n^{-1}I_2 \end{pmatrix}$$

を考えれば, $a + n^{-1}I_1$ は invertible であるので, 前の議論から

$$b^*(a + n^{-1}I_1)^{-1}b \leq c + n^{-1}I_2$$

をえる. よって $\{b^*(a+n^{-1}I_1)^{-1}b\}$ は positive operator の bounded increasing sequence なので, その strong operator topology による極限が存在して, それを c_1 とおけば明らかに $c_1 \leq c$ である. よって positive operator C_1 を

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & b^* \\ b & a \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathcal{H}_2 \\ \oplus \\ \mathcal{H}_1, \end{array}$$

とおけばこれが minimality の条件を満たすことは明らかである. ∎

この Lemma によって得られる positive operator の minimality は, 今後の議論において重要である. そこで次の定義を与える.

Definition 3.2. Hilbert space $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ 上の positive operator C を考える. このとき positive operator C_1 が *$\mathcal{H}_2$-minimal part of C* であるとは, 次の条件を満たすときをいう.

$$C_1|_{\mathcal{H}_2} = C|_{\mathcal{H}_2}, \quad P_{\mathcal{H}_1}C_1P_{\mathcal{H}_1} = \text{s-}\lim_{t\to 0} P_{\mathcal{H}_1}C(tP_{\mathcal{H}_2} + P_{\mathcal{H}_2}CP_{\mathcal{H}_2})^{-1}CP_{\mathcal{H}_1}$$

ここで $P_{\mathcal{H}_i}$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_i$ $(i=1,2)$ の上への projection とする．特に $C=C_1$ であるとき, C は $\mathcal{H}_2$-*minimal* であるという.

$\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ 上の positive operator C の matrix form

$$C=\begin{pmatrix} c & b^* \\ b & a \end{pmatrix}\begin{array}{c}\mathcal{H}_1\\ \oplus\\ \mathcal{H}_2\end{array}$$

を考える. a の区間 (t,∞) における spectral projection を e_t とすれば, 任意の $t>0$ に対して,

$$\begin{aligned}\|b^*a^{-\frac{1}{2}}e_t\|^2 &= \lim_{n\to\infty}\|b^*(a+n^{-1})^{-\frac{1}{2}}e_t(a+n^{-1})^{-\frac{1}{2}}b\|\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\|b^*(a+n^{-1})^{-1}\|\\ &\leq \|c_1\|\end{aligned}$$

であるので $b^*a^{-\frac{1}{2}}e_t$ は, ある operator d に strong topology で収束する. $\mathcal{H}_1$ の任意の元 x に対して,

$$\begin{aligned}da^{-\frac{1}{2}}x &= \lim_{t\to 0}b^*a^{-\frac{1}{2}}e_ta^{-\frac{1}{2}}x\\ &= b^*e_{0+}x.\end{aligned}$$

さらに

$$0\leq b^*(a+n^{-1}I_1)^{-1}b\leq c+n^{-1}I_2$$

より,

$$0\leq b^*(na+I_1)^{-1}b\leq n^{-1}c+n^{-2}I_2.$$

であるので $n\to\infty$ のときの strong limit を計算すれば

$$b^*(I_1-e_{0+})b=0$$

である. よって

$$\begin{aligned}da^{\frac{1}{2}} &= b^*e_{0+}=b^*e_{0+}+b^*(I_1-e_{0+})\\ &= b^*\end{aligned}$$

から $a^{\frac{1}{2}}d^*=b$ であるので, map $a^{-\frac{1}{2}}: b\mathcal{H}_2\to d^*\mathcal{H}_2$ は well-defined で $d^*=a^{-\frac{1}{2}}b$ をみたす. いま $c_1\geq(b^*a^{-\frac{1}{2}}e_t)a^{-\frac{1}{2}}b$ であるので, $t\to 0$ のときの strong limit をとれば, $dd^*\leq c_1$ である.

一方,

$$\begin{pmatrix} dd^* & b^* \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^* & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^* & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\geq 0$$

かつ C_1 の minimality より, $dd^* \geq c_1$ である. よって $c_1 = dd^*$ となり, これより C_1 は次の matrix representation を持つ.

$$C_1 = \begin{pmatrix} dd^* & b^* \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^* & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^* & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

以上により, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ 上の positive operator C が, 次の matrix form

$$C = \begin{pmatrix} c & b^* \\ b & a \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \oplus \\ \mathcal{H}_2 \end{matrix}$$

を持つとき, C はいつでも

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^* & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^* & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c - dd^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように lower triangular matrix form をもつ operator の積と, ある positive operator によって分解できる.

次に, より一般的な case として, Hilbert space

$$\mathcal{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n$$

を考えて

$$\mathcal{M}_n = \sum_{k=-\infty}^{n} \oplus \mathcal{H}_k, \qquad \mathcal{N}_n = \sum_{k=n}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_k$$

とおく. このとき, $\mathcal{H}$ 上の任意の positive operator C に対して, C の $\mathcal{N}_{n+1}$-minimal part $C^{(n+1)}$ が存在する. 明らかに $C - C^{(n+1)}$ は positive なので, その $\mathcal{N}_n$-minimal part C_n をえる. この操作を繰り返すことにより $C-(C_{k+1}+\cdots+C_n+C^{(n+1)})$ の $\mathcal{N}_k$-minimal part C_k $(k < n)$ が存在するので, $R^{(k-1)} = C-(C_k+C_{k+1}+\cdots+C_n+C^{(n+1)})$ とおくと C は次のようにかける.

$$C = R^{(k-1)} + C_k + C_{k+1} + \cdots + C_n + C^{(n+1)} \tag{3.1}$$

この分解を C の Hilbert space $\mathcal{H} = \mathcal{M}_{k-1} \oplus \mathcal{H}_k \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{N}_{n+1}$ に対する *Cholesky decomposition* という.

この Cholesky decomposition において, 次の性質は重要である.

Lemma 3.3. *Hilbert space* $\mathcal{H} = \mathcal{M}_{k-1} \oplus \mathcal{H}_k \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{N}_{n+1}$ に対する *positive operator* C の *Cholesky decomposition*

$$C = R^{(k-1)} + C_k + C_{k+1} + \cdots + C_n + C^{(n+1)}$$

を考える. このとき, 任意の $k, n \in \mathbb{Z}$ $(k < n)$ に対して, *operator* $C_k + C_{k+1} + \cdots + C_n + C^{(n+1)}$ は C の $\mathcal{N}_k$-*minimal part* である.

ここで得られた Cholesky decomposition を接合積の positive operator に適用することにより, 解析的接合積の元による次の分解定理をえた.

Theorem 3.4. *$\mathfrak{L}$ の任意の positive operator C に対して, $\mathfrak{L}$ の positive operator C_∞ と $\mathfrak{A}_+$ の operator A が存在して, $C = C_\infty + A^*A$ と分解できる.*

Proof. $\mathcal{H}_n = L^2(M)$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$ とおくと, $\mathbb{L}^2$ は

$$\mathbb{L}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n$$

とかくことができる. よって (3.1) と同様に Hilbert space の分解

$$\mathbb{L}^2 = \mathcal{M}_{-(n+1)} \oplus \mathcal{H}_{-n} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{N}_{n+1}$$

に対する C の Cholesky decomposition

$$C = R^{-(n+1)} + C_{-n} + \cdots + C_n + C^{(n+1)}$$

を考えれば, 明らかに $\mathrm{s}-\lim_{n\to\infty} R^{-(n+1)} = 0$ である. また $C^{(n)} \geq C^{(n+1)}$ かつ $C^{(n)}$ は bounded より, $n \to \infty$ としたときの $\{C^{(n)}\}$ の strong limit C_∞ が存在して $C = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k + C_\infty$ をみたす. Lemma 3.3 より, operator $\sum_{k=n}^{\infty} C_k + C_\infty$ は the $\mathcal{N}_n$-minimal part of C であるので, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して Hilbert space の分解 $\mathbb{L}^2 = \mathcal{M}_{n-1} \oplus \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{N}_{n+1}$ を考えれば, lower triangular form を持つ operator

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_n^* & a_n^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathcal{M}_{n-1} \\ \oplus \\ \mathcal{H}_n \\ \oplus \\ \mathcal{N}_{n+1} \end{array}$$

が存在して $C_n = A_n^* A_n$ となる. いま,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=-n}^{n} A_k\right)^* \left(\sum_{k=-n}^{n} A_k\right) &= \sum_{k=-n}^{n} A_k^* A_k \\ &= \sum_{k=-n}^{n} C_k \end{aligned}$$

より, $\|\sum_{k=-n}^{n} A_k\|^2 \leq \|C\| < \infty$ であるので, $\left\{\sum_{k=-n}^{n} A_k\right\}$ は, ある operator A に weak operator topology で収束して $A^*A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n$ をみたす. この operator A の Hilbert space の分解

$$\mathbb{L}^2 = \cdots \oplus \mathcal{H}_{-n} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \cdots .$$

に対する matrix form は, lower triangular form を持つことを注意しておく.

次に C_∞ が $\mathfrak{L}$ に属することを示す. $\mathfrak{L}=\mathfrak{R}'$ であったので C_∞ が $\mathfrak{R}$ の全ての生成元と可換であることを示せば良い. 任意の $f\in\mathcal{N}_n$ に対して, $R_\delta f\in\mathcal{N}_{n+1}$ であるので,

$$\begin{aligned} R_\delta^* C^{(n+1)} R_\delta f &= R_\delta^* C R_\delta f \\ &= R_\delta^* R_\delta^* C f \\ &= C f \end{aligned}$$

である. よって $C^{(n)}$ の minimality より, $R_\delta^* C^{(n+1)} R_\delta \geq C^{(n)}$ である. 同様に, 任意の $f\in\mathcal{N}_{n+1}$ に対して, $R_\delta C^{(n)} R_\delta^* \geq C^{(n+1)}$ であるので, $R_\delta C^{(n+1)} R_\delta^* = C^{(n)}$ となり $R_\delta C_\infty R_\delta^* = C_\infty$ が成り立つ. また, 任意の $n\in\mathbb{Z}$ と M の unitary operator w に対して

$$\begin{aligned} R_w^* C^{(n)} R_w f &= R_w^* C R_w f \\ &= R_w^* R_w C f \\ &= C f \qquad (\forall f\in\mathcal{N}_n) \end{aligned}$$

であるので $R_w^* C^{(n)} R_w \geq C^{(n)}$. この式において w と w^* を取り換えることにより, $R_w C^{(n)} R_w^* \geq C^{(n)}$ も示せるので $R_w^* C_\infty R_w = C_\infty$ となる. 以上より C_∞ は $\mathfrak{R}$ の全ての generator と可換であるので, C_∞ は $\mathfrak{L}$ の元である.

次に A が $\mathfrak{L}_+$ の元であることを示す. 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して, $C_n = C^{(n)} - C^{(n+1)}$ かつ $R_\delta C^{(n+1)} R_\delta^* = C^{(n)}$ より,

$$\begin{aligned} R_\delta C_n R_\delta^* &= R_\delta (C^{(n)} - C^{(n+1)}) R_\delta^* \\ &= R_\delta C^{(n)} R_\delta^* - R_\delta C^{(n+1)} R_\delta^* \\ &= C^{(n-1)} - C^{(n)} \\ &= C_{n-1} \end{aligned}$$

である. そこで C_{n-1} と C_n の matrix form

$$C_{n-1} = \begin{pmatrix} d_{n-1}d_{n-1}^* & b_{n-1}^* & 0 & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathcal{M}_{n-2} \\ \oplus \\ \mathcal{H}_{n-1} \\ \oplus \\ \mathcal{H}_n \\ \oplus \\ \mathcal{N}_{n+1} \end{array}, \quad C_n = \begin{pmatrix} d_n d_n^* & b_n^* & 0 \\ b_n & a_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathcal{M}_{n-1} \\ \oplus \\ \mathcal{H}_n \\ \oplus \\ \mathcal{N}_{n+1} \end{array}$$

を考えれば $R_\delta C_n R_\delta^* = C_{n-1}$ であったので $a_n = a_{n-1}$, $b_n = b_{n-1}$ となり

$$\begin{aligned} d_{n-1} &= a_{n-1}^{-\frac{1}{2}} b_{n-1} \\ &= a_n^{-\frac{1}{2}} b_n \\ &= d_n \end{aligned}$$

である．よって $R_\delta A_{n-1}R_\delta^* = A_n$ より，$R_\delta A R_\delta^* = A$ である．また任意の M の unitary operator w に対して，operator R_w は次の matrix form を持つ．

$$R_w = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 & \\ & r_{\alpha^{-1}(w)} & & & \\ & & r_w & & \\ & & & r_{\alpha(w)} & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{H}_{-1} \\ \oplus \\ \mathcal{H}_0 \\ \oplus \\ \mathcal{H}_1 \\ \vdots \end{array}$$

$R_w C_n R_w^* = C_n$ かつ C_n の $\mathcal{M}_{n-1} \oplus \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{N}_{n+1}$ に対する matrix form から

$$r_{\alpha^n}(w)a_n = a_n r_{\alpha^n}(w), \qquad r_{\alpha^n}(w)b_n \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & r_{\alpha^{n+2}}(w^*) & \\ 0 & & r_{\alpha^{n+1}}(w^*) \end{pmatrix} = b_n$$

である．よって

$$\begin{aligned} r_{\alpha^n}(w)d_n & \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & r_{\alpha^{n+2}}(w^*) & \\ 0 & & r_{\alpha^{n+1}}(w^*) \end{pmatrix} \\ &= r_{\alpha^n}(w)a_n^{-\frac{1}{2}}b_n \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & r_{\alpha^{n+2}}(w^*) & \\ 0 & & r_{\alpha^{n+1}}(w^*) \end{pmatrix} \\ &= a_n^{-\frac{1}{2}}r_{\alpha^n}(w)b_n \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & r_{\alpha^{n+2}}(w^*) & \\ 0 & & r_{\alpha^{n+1}}(w^*) \end{pmatrix} \\ &= a_n^{-\frac{1}{2}}b_n \\ &= d_n \end{aligned}$$

より $R_w A_n R_w^* = A_n$ となり $R_u A R_u^* = A$ をえる．以上より A は $\mathfrak{R}$ の全ての generator と可換であるので A は $\mathfrak{L}$ の元である．更に A は

$$\mathcal{H} = \cdots \oplus \mathcal{H}_{-n} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \cdots$$

に対して lower triangular form を持つので A は $\mathfrak{L}_+$ の元である． ∎

この定理で得られた分解において，いつ $C_\infty = 0$ となるかは興味深い問題である．我々は Arveson によって作用素環に導入された outer operator の概念を，解析的接合積に導入して，この問題を考察する．

Definition 3.5. 解析的接合積 $\mathfrak{L}_+$ の元 A が *outer* であるとは A の range projection E_A が $L(M)$ に属して, $A\mathbb{H}^2$ が $[A\mathbb{L}^2] \cap \mathbb{H}^2$ の中で dense であるときをいう. ここで $[A\mathbb{L}^2]$ は $A\mathbb{L}^2$ の closed linear span をあらわす.

次の Lemma は outer operator の本質的な特徴付けである.

Lemma 3.6. *A を $\mathfrak{L}_+$ の operator で, その range projection E_A が $L(M)$ に属するものとする. このとき次は同値である.*

(i) $\left[A\mathbb{H}^2\right] = \left[A\mathbb{L}^2\right] \cap \mathbb{H}^2$

(ii) $E_{P_{\mathbb{H}^2}A(I-P_{\mathbb{H}^2})} \leq E_{AP_{\mathbb{H}^2}}$

(iii) $A^* P_{\mathbb{H}^2} A : \mathbb{H}^2$*-minimal*

次に $\mathfrak{L}$ の positive operator C に対して,

$$C' = \text{s-}\lim_{t\to 0}(P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} C P_{\mathbb{H}^2})^*(tP_{\mathbb{H}^2} + P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2})^{-1}(P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} C P_{\mathbb{H}^2})$$

とおく. このとき, 我々は次の定理を得た.

Theorem 3.7. *$\mathfrak{L}$ の任意の positive operator C に対して, $\mathfrak{L}_+$ の outer operator A が存在して C が $C = A^*A$ と分解できるための必用十分条件は*

$$\text{s} - \lim_{n\to\infty} R_\delta^{-n} C' R_\delta^n = 0$$

が成り立つことである.

更に C が $\mathfrak{L}$ で invertible なら, C はこの条件をみたす.

Proof. $\mathfrak{L}_+$ の outer operator A によって $C = A^*A$ と分解されていると仮定する. $C = P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} A^* P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} A P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} + A^* P_{\mathbb{H}^2} A$ とかけるので C の matrix form は

$$C = \begin{pmatrix} P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} C P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} & P_{\mathbb{H}^2}^{\perp}(A^* P_{\mathbb{H}^2} A) P_{\mathbb{H}^2} \\ P_{\mathbb{H}^2}(A^* P_{\mathbb{H}^2} A) P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} & P_{\mathbb{H}^2}(A^* P_{\mathbb{H}^2} A) P_{\mathbb{H}^2} \end{pmatrix}$$

となる. 仮定より A は outer なので, Lemma 3.6 の (iii) より

$$C' = P_{\mathbb{H}^2}^{\perp}(A^* P_{\mathbb{H}^2} A) P_{\mathbb{H}^2}^{\perp}$$

が成り立つ. よって 任意の $\mathbb{L}^2$ の元 f に対して,

$$\begin{aligned}
\|R_\delta^{-n} C' R_\delta^n f\| &= \|R_\delta^{-n} P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} A^* P_{\mathbb{H}^2} A P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} R_\delta^n f\| \\
&= \|R_\delta^{-n} P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} A^* P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n A R_\delta^{-n} P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} R_\delta^n f\| \\
&\leq \|A\| \|P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n A R_\delta^{-n} P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} R_\delta^n f\| \\
&\leq \|A\| (\|P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n A R_\delta^{-n} P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} R_\delta^n f - P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n A f\| + \|P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n A f\|) \\
&\leq \|A\|^2 \|P_{\mathbb{H}^2}^{\perp} R_\delta^n f - f\| + \|A\| \|R_\delta^{-n} P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n A f\| \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となり $\mathrm{s}-\lim_{n\to\infty} R_\delta^{-n} C' R_\delta^n = 0$ が示された.

次に $\mathrm{s}-\lim_{n\to\infty} R_\delta^{-n} C' R_\delta^n = 0$ を仮定する. Theorem 3.4. より C は, ある $\mathfrak{L}_+$ の元 A と $\mathfrak{L}$ の positive operator C_∞ によって $C = A^*A + C_\infty$ と分解される. P_{-n} を $\mathbb{L}^2$ から $R_\delta^{-n}\mathbb{H}^2$ の上への projection として, $P_{-n}^\perp = I - R_{-n}$ とおけば

$$R_\delta^{-n} P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n = P_{-n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である. C は $C = P_{-n}^\perp C P_{-n}^\perp + P_{-n}^\perp C P_{-n} + P_{-n} C P_{-n}^\perp + P_{-n} C P_{-n}$ とかけるので,

$$\text{s-}\lim_{t\to 0} P_{-n} C P_{-n}^\perp \{t P_{-n}^\perp + P_{-n}^\perp C P_{-n}^\perp\}^{-1} P_{-n}^\perp C P_{-n} = R_\delta^{-n} C' R_\delta^n$$

となり $C^{(n)}$ は次の matrix form をもつ.

$$C^{(n)} = \begin{pmatrix} P_{-n}^\perp C P_{-n}^\perp & P_{-n}^\perp C P_{-n} \\ P_{-n} C P_{-n}^\perp & R_\delta^{-n} C' R_\delta^n \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} \|C^{(n)} f\|^2 &= \|P_{-n}^\perp C P_{-n}^\perp f + P_{-n}^\perp C P_{-n} f\|^2 + \|P_{-n} C P_{-n}^\perp f + R_\delta^{-n} C' R_\delta^n f\|^2 \\ &\leq \|P_{-n}^\perp C f\|^2 + (\|C\| \|P_{-n}^\perp f\| + \|R_\delta^{-n} C' R_\delta^n f\|)^2 \end{aligned}$$

より, 仮定から $\|C^{(n)} f\|^2 \to 0\ (n \to \infty)$ となる. 故に $C_\infty = 0$ である. このとき

$$A^* P_{\mathbb{H}^2}^\perp A = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$$

は C の $\mathbb{H}^2$-minimal part であるので, Lemma 3.6 (iii) より, A は outer である.

最後に C が invertible のとき, $P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2}$ もまた $B(\mathbb{H}^2)$ において invertible なので, Lemma 3.1 から,

$$C' = (P_{\mathbb{H}^2}^\perp C P_{\mathbb{H}^2})(P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2})^{-1}(P_{\mathbb{H}^2}^\perp C P_{\mathbb{H}^2})^*$$

である. よって $\mathbb{L}^2$ の任意の元 f に対して,

$$\begin{aligned} \|R_\delta^{-n} C' R_\delta^n f\| &= \|R_\delta^{-n} (P_{\mathbb{H}^2}^\perp C P_{\mathbb{H}^2})(P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2})^{-1}(P_{\mathbb{H}^2}^\perp C P_{\mathbb{H}^2})^* R_\delta^n f\| \\ &\leq \|(P_{\mathbb{H}^2}^\perp C P_{\mathbb{H}^2})(P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2})^{-1}\| \|(P_{\mathbb{H}^2}^\perp C P_{\mathbb{H}^2})^* R_\delta^n f\| \\ &\leq \|C\| \|(P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2})^{-1}\| (\|P_{\mathbb{H}^2} C R_\delta^n f\| + \|P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n f\|) \\ &\leq \|C\| \|(P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2})^{-1}\| (\|P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n C f\| + \|R_\delta^{-n} P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n f\|) \\ &\leq \|C\| \|(P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2})^{-1}\| (\|R_\delta^{-n} P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n C f\| + \|R_\delta^{-n} P_{\mathbb{H}^2} C P_{\mathbb{H}^2} R_\delta^n f\|) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

となり, $R_\delta^{-n} C' R_\delta^n$ は strong operator topology で 0 に収束する. ∎

接合積の positive operator の, 解析的接合積における分解性の研究は McAsey-Muhly-Saito [10] によって, 幾つかの結果が得られている. その一つとして, 彼等は任意の $\mathfrak{L}$ の positive invertible operator は $A \in (\mathfrak{L}_+) \cap (\mathfrak{L}_+)^{-1}$ によって A^*A と分解出来ることを示した. 我々は Theorem 3.7 の corollary として, 同様の結果を得た.

Corollary 3.8. ([10, Corollary 5.3]) $\mathfrak{L}$ の任意の *positive invertible operator* は $\mathfrak{L}_+ \cap (\mathfrak{L}_+)^{-1}$ の *outer operator* A によって A^*A と分解できる.

次に, 我々の得た分解定理における一意性について考察する. まず、Theorem 3.4 における分解については, 一意性よりは弱い形で次のような結果を得た.

Proposition 3.9. $\mathfrak{L}$ の任意の *positive operator* C の Theorem 3.4 における分解を $C = A^*A + C_\infty$ とする. このとき, C が $\mathfrak{L}_+$ の元 B と $\mathfrak{L}$ の *positive* な元 D によって, 分解 $C = B^*B + D$ をもてば $A^*A \geq B^*B$ である.

Proof. Lemma 3.3 より, $A^*P_{\mathbb{H}^2}A + C_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} Cn + C_\infty$ は C の $\mathbb{H}^2$-minimal part であるので

$$A^*P_{\mathbb{H}^2}A + C_\infty \leq B^*P_{\mathbb{H}^2}B + D$$

である. よって

$$\begin{aligned} R_\delta^{-n}A^*P_{\mathbb{H}^2}AR_\delta^n + C_\infty &= R_\delta^{-n}(A^*P_{\mathbb{H}^2}A + C_\infty)R_\delta^n \\ &\leq R_\delta^{-n}(B^*P_{\mathbb{H}^2}B + D)R_\delta^n \\ &\leq R_\delta^{-n}B^*P_{\mathbb{H}^2}BR_\delta^n + D \end{aligned}$$

であり, $n \to \infty$ のとき $R_\delta^{-n}A^*P_{\mathbb{H}^2}AR_\delta^n$, $R_\delta^{-n}B^*P_{\mathbb{H}^2}BR_\delta^n$ はともに weak operator topology で 0 に収束するので $C_\infty \leq D$ となり $A^*A \geq B^*B$ を得る. ∎

最後に, Corollary 3.8 の分解に対する一意性を述べる.

Proposition 3.10. $\mathfrak{L}$ の任意の *positive operator* C の Corollary 3.8 における分解を $C = A^*A$ とする. C が $\mathfrak{L}_+ \cap (\mathfrak{L}_+)^{-1}$ の元 B によって, $C = B^*B$ と分解できるなら, ある *unitary operator* $U \in \mathfrak{L}_+ \cap (\mathfrak{L}_+)^{-1}$ が存在して, $B = UA$ とかける.

Proof. $A^*A = B^*B$ より, 任意の $f \in \mathbb{L}^2$ に対して, $\|Af\| = \|Bf\|$ である. よって $U_0|_{[A\mathbb{L}^2]} = 0$ をみたす operator $U_0 : Ax \mapsto Bx$, $(\forall f \in \mathbb{L}^2)$ の closure として partial isometry U が定義できて, U は $B = UA$ をみたす. いま A, B は $\mathfrak{L}_+ \cap (\mathfrak{L}_+)^{-1}$ の元であるので $U = BA^{-1} \in \mathfrak{L}_+ \cap (\mathfrak{L}_+)^{-1}$ となり, U は $\mathfrak{L}_+ \cap (\mathfrak{L}_+)^{-1}$ の unitary operator である. ∎

References

1. W. B. Arveson, *Interpolation problems in nest algebras*, J. Funct. Anal., **20** (1975), 208–233.
2. U. Haagerup, *The standard form of von Neumann algebras*, Math. Scand., **37** (1975), 271–283.
3. U. Haagerup, *L^p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra*, (Colloques internationaux du CNRS, No. 274, Marseille 20-24 Juin 1977);, algèbre d'opèrateurs et leurs applications en physique mathèmatique (1979), Éditions du CNRS,, Paris, 175–184.
4. E. C. Lance, *Cohomology and perturbation of nest algebras*, Proc. London Math. Soc. **43** (1981), 334–356.
5. S. C. Power, *Nuclear operators in nest algebras*, J. Operator Theory **10** (1983), 337–352.

6. S. C. Power, *Factorization in analytic operator algebras*, J. Funct. Anal. **67** (1986), 413–432.
7. S. C. Power, *Spectral characterization of the Wold-Zasuhin decomposition and prediction-error operator*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **110** (1991), 559–567.
8. M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products* (Invariant subspaces and maximality), Trans. Amer. Math. Soc., **248** (1979), 381-409.
9. M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products II*, J. Math. Soc. Japan, **33** (1981), 485-495.
10. M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products III*, J. Operator Theory, **12** (1984), 3-22.
11. K-S. Saito, *Toeplitz operators associated with analytic crossed products*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **108** (1990), 539–549.
12. K-S. Saito, *Toeplitz operators associated with analytic crossed products II* (*Invariant subspaces and factorization*), Integral Equation and Operator Theory **14** (1991), 251–275.
13. M. Terp, *L^p-spaces associated with von Neumann algebras*, Rapport No. 3, University of Odense, 1981.
14. N. Young, *An introduction to Hilbert space*, Cambridge University Press, 1988.